С. ДУДИН.

Очерки по элементарной Аналитической Геометрии в параллельных тангенциальных координатах.

ОЧЕРК ПЕРВЫЙ.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Система «параллельных» тангенциальных координат, положенная в настоящих «Очерках» в основу изложения Аналитической Геометрии, представляет тот замечательный частный случай обычной системы трилинейных тангенц. координат, когда одна из вершин координатного треугольника удаляется в бесконечность.

Система эта впервые была применена в 1829 г. к решению одного геометрического вопроса Chasles'ем, и снова упомянута им же в «Высшей Геометрии» (§ 496). В 1870-71 W. Unverzagt дал[1]) решение в параллельных координагах основных задач Аналитической Геометрии. Почти одновременно (1874 г.) и, повидимому, независимо, к той же системе пришел K. Schwering[2]), давший позже в сочинении «Theorie und Anwendung der Linien koordinaten» (Leipz. 1884) систематическое изложение этой теории. В том же 1884 г. M. D'Ocagne в ряде статей, опубликованных в Nouv. Ann. de Math. 3-e sér. t. III, изданных затем в виде отдельной брошюры «Coordonnées parallèles et axiales» (Paris G.-V. 1885) рассмотрел «параллельные» координаты и немедленно применил их[3]) к графическому решению трехчленных уравнений и мн. др. вопросам.

Встретив весной 1923 г. в прекрасной книге Killing'a «Lehrb. d. an. Geom. in homog. Koord.», 1-e Teil p. 63, (Paderborn 1900) указанне на эту систему координат и не найдя в Екатеринбурге кроме вышеприведенных исторических и библиографических, никаких данных, я вынужден был попытаться самостоятельно ответить на многие возникшие у меня вопросы, в результате чего и появились печатаемые «Очерки».

---

1) W. Unverzagt. Ueber ein einfaches Koordinatensystem der Geraden (Progr. Realgymn, Wiesbaden 1870-71).

2) K. Schwering. Ueber ein neues Linienkoordinatensystem („Jahresber. d. Westfalien. pro 1874).

3) M. d'Ocagne. Procédé nouveau de calcul graphique (Ann. des pontet chaussés, 1884).

Я должен упомянуть, что в октябре 1923 г. мне удалось получить из Германии вышеупомянутую книгу Schwering'a, в которой, как и следовало ожидать, я нашел большую часть своих результатов. После некоторых колебаний я решил опубликовать свою работу [1]) и по след. мотивам: прежде всего, насколько мне известно, в русской математической литературе не существует ни одной статьи, посвященной параллельным координатам; далее, теория эта находит себе обширное и важное применение (в т.-наз. abaques à alignement, или Methode der fluchtrechten Punkte) в Номографии, знакомство с которой делается все более и более необходимым для математика и инженера. Наконец, некоторых из полученных мной результатов нет в единственном бывшем мне доступным сочинении Schwering'a. Сюда относится в печатаемом (первом) очерке учение о преобразовании координат, все вопросы, связанные с двойным знаком, и другие более мелкие; упомяну еще теорию приведения общего уравнения 2-й степени к простейшему виду, теорию инвариантов и др. вопросы, опубликовать которые надеюсь в след. очерках.

В заключение считаю долгом кроме вышеупомянутой книги Killing'a и классического курса Salmon'a отметить, как бывшее мне чрезвычайно полезным, соч. Н. Иовлева «Тангенциальные координаты», напечатанное в Уч. Зап. Каз. Унив. за 1914-1915 гг.

Екатеринбург. *С. Дудин.*
Декабрь 1923 г.

§ 1. Координаты.

За основной геометрический элемент, при помощи которого мы будем строить другие геометрические образы (точки, кривые), мы избираем *прямую*.

1. Каждую прямую на плоскости мы будем характеризовать, вообще говоря, двумя числами (u, v); и, обратно, каждую пару чисел (u, v) будем рассматривать, как аналитический эквивалент некоторой определенной прямой. Это соответствие между прямыми плоскости и парами чисел мы осуществим следующим образом:

2. На двух параллельных прямых (U), (V) (черт. 1) возьмем по две произвольных точки 0_1, ε_1, 0_2, ε_2. Направление от 0_1 (0_2) к ε_1 (ε_2) будем называть положительными. В отрезках, расположенных на прямых (U), (V), будем различать начальную точку, (которую будем писать первою,) и конечную. Длинам отрезков будем приписывать знак $+$, если направление отрезка, считаемое *от* начальной точки к конечной, совпадает с положи-

[1]) Заимствовав из Schveting'a примеч. 2 § 21 (виклоида).

тельным направлением прямой (U) или (V), и — в противоположном случае.

Произвольной прямой, пересекающей (U) и (V) в точках A и B, мы сопоставим числа

$$u = \frac{0_1 A}{0_1 \varepsilon_1}, \quad v = \frac{0_2 B}{0_2 \varepsilon_2} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

которые будем называть (тангенциальными) координатами этой прямой. Очевидно, координаты прямой (u, v) суть числа, измеряющие в единицах $0_1 \varepsilon_1$, $0_2, \varepsilon_2$ величины (т. е. снабженные знаками длины) отрезков $0_1 \varepsilon_1$, $0_2 \varepsilon_2$.

Таким образом, всякой (вещественной) паре чисел (u, v) отвечает вполне определенная прямая, построение которой совершенно очевидно. Обратное — несправедливо, т. к. для прямых, параллельных (U), (V), определение теряет силу и должно быть видоизменено.

3. Через 0_1, 0_2 проводим прямую, на которой будем рассматривать положительное и отрицательное направление и положительные и отрицательные отрезки (как в п^{0}2 на (U) и (V)). Тогда каждой точке M прямой отвечает вполне определенное (по величине и знаку и независимое от выбора положит. направления и единицы длины) число

$$\lambda = \frac{0_1 M}{M 0_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Для точек $0_1, 0_2$ $\lambda = 0, \infty$. Числу $\lambda = -1$ не отвечает никакой точки. Мы будем говорить, что значению $\lambda = -1$ отвечает «бесконечно удаленная» точка прямой $0_1 0_2$ (и тем самым приписывать каждой прямой *единственную* бесконечно-удаленную точку).

4. Из черт. 1 видно, что для точки C, пересечения прямой AB с $0_1 0_2$, по величине и по знаку

$$\lambda = \frac{u}{v} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Положим, что прямая AB вращается около C, стремясь сделаться параллельной прямым (U), (V). Равенство (2) будет справедливо при всяком положении прямой, а, следовательно, и в пределе. Теперь очевидно, что всякую прямую, параллельную (U), (V), можно характеризовать числом

$$\lambda = \lim_{u \to \infty} \frac{u}{v}$$

т. е. отношением, в котором она делит отрезок $0_1 0_2$.

Числу $\lambda = -1$ не отвечает никакой прямой. Мы будем говорить, что $\lambda = -1$ определяет «бесконечно-удаленную прямую» (и тем самым утверждать существование на плоскости *единственной* бесконечно-удаленной прямой).

Введя эти определения, можем утверждать, что каждой паре (конечных или бесконечных)[1] чисел отвечает одна и только одна прямая, *и обратно.*

5. Прямыя (U), (V) будем называть «осями координат», точки $0_1, 0_2$ — «начальными точками», прямую $0_1 0_2$ — основной прямой или «основанием», точку 0 — середину отрезка $0_1 0_2$, введение которой окажется весьма полезным в дальнейшем,—«средней точкой» и, наконец, всю фигуру координатным «двуугольником». При этом, если не оговорено противного, будем всегда предполагать, что прямая $0_1 0_2 \perp$ (U), (V) и направлена от 0_1 к 0_2. За положительное направление оси U примем направление от 0_1 вниз (черт· 2), оси V — от 0_2 вверх. Наконец, точки ε_1, ε_2 выберем так, чтобы $0_1\varepsilon_1 = 0_2\varepsilon_2 = 0_1 0_2 =$ единице.

§ 2. Прямая.

6. Из черт. 2 непосредственно следует, что

$$u + v = \operatorname{tg}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

где α угол, образуемый прямой (u, v) с основанием. Отсюда

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{1+(u+v)^2}}, \quad \operatorname{Sin}\alpha = \frac{u+v}{\varepsilon\sqrt{1+(u+v)^2}} \quad (\varepsilon = \pm 1) \quad (3')$$

причем ε в обеих формулах (3′) одно и тоже, и выбор его зависит от нас.

Этим выбором *однозначно* определяется направление прямой, которое образует с *положительным направлением основания* угол α (3′) и которое будем называть положительным направлением или просто направлением прямой (u, v). Прямую, на которой указано (полож.) направление, будем иногда называть *осью.*

7. Введем дальнейшие соглашения.

Одно из двух возможных в плоскости направлений вращения прямой около одной из ея точек (напр., *против* часовой стрелки) условимся называть положительным, другое — отрицательным. Углом между двумя прямыми π_1, π_2 будем называть угол, на который нужно повернуть (около точки пересечения) *первую* прямую, чтобы она совпала со второй. Этому углу будем приписывать знак +, если вращение (от π_1 к π_2) совершается в положительн. направлении, и — в противоположном случае. Углов, удовлетворяющих данному определению, бесчисленное множество. Если α один из них, то все они заключаются в формулах

$$\alpha = \alpha_0 + m\pi, \quad \alpha = n\pi - \alpha_0 \quad (\text{m, n произвольные целые числа}).$$

Условимся, далее, под углом между двумя прямыми (осями) $\vec{\pi}_1, \vec{\pi}_2$ подразумевать считаемый от π_1 к π_2 угол между их

[1]) Но таких, что их отношение стремится к определенному (конечному или бесконечному) пределу.

положительными направлениями. Тогда все углы выражаются *единственной формулой*

$$\alpha = \alpha_0 + 2\,k\pi \quad (\text{k произвольное целое число})$$

и тригонометрические функции угла α определены однозначно.

8. Обозначив через α_1, α_2 углы, образуемые прямыми $\pi_1\ (u_1, v_1)$, $\pi_2\ (u_2, v_2)$ с основанием, получаем для определения угла α между осями π_1, π_2

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\ (\pi_1, \pi_2) = \operatorname{tg}\ (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{u_2 + v_2 - (u_1 + v_1)}{1 + (u_1 + v_1)(u_2 + v_2)} \quad . \ (4a)$$

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{1 + (u_1 + v_1)(u_2 + v_2)}{\varepsilon_1\varepsilon_2 \sqrt{1 + (u_1 + v_1)^2} \cdot \sqrt{1 + (u_2 + v_2)^2}} \quad \ldots (4b)$$

$$\sin(\pi_1, \pi_2) = \frac{u_2 + v_2 - (u_1 + v_1)}{\varepsilon_1\varepsilon_2 \sqrt{1 + (u_1 + v_1)^2}\ \sqrt{1 + (u_2 + v_2)^2}} \quad \ldots (4c)$$

Примеры. Для оси V $(\lambda = o)$ $\varepsilon = +1$, для оси U $(\lambda = \infty)$ $\varepsilon = -1$. Поэтому $\cos(U, \pi_1) = -\dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{1 + (u_1 + v_1)^2}} = -\sin\alpha$, $\sin(U, \pi_1) = \cos\alpha$, $\cos(V, \pi_1) = \sin\alpha$, $\sin(V, \pi_1) = -\cos\alpha$, $\cos(U, V) = -1$. Из (4 a) и из (3) вытекает *условие параллельности* прямых π_1, π_2

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \quad \text{или} \quad u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \quad \ldots (5)$$

и условие перпендикулярности

$$(u_1 + v_1)(u_2 + v_2) = -1 \quad \text{или} \quad u_1 + v_1 = -\frac{1}{u_2 + v_2} \quad \ldots (6)$$

9. Прямые $\pi_1(u_1, v_1)$, $\pi_2(u_2, v_2)$ будем называть параллельными, если $\varepsilon_1\varepsilon_2 = +1$ и противоположными, если $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$. Найдем расстояние между двумя параллельными прямыми.

Из черт. 3 видно, что искомое расстояние есть

$$\left|(v_2 - v_1)\cos\beta\right| = \left|(u_1 - u_2)\cos\beta\right| = \left|\frac{v_2 - v_1}{\sqrt{1 + (u_i + v_i)^2}}\right| (i = 1, 2)\ (7.')$$

β есть *острый* угол между *прямыми* U и π. Мы напишем формулу (7′) в виде

$$d = (v_2 - v_1)\cos\alpha = \frac{v_2 - v_1}{\varepsilon\sqrt{1 + (u_1 + v_1)^2}} \quad \ldots (7)$$

где ε определяет направление параллельных прямых, а α угол этого направления с основанием. Тогда d будет получаться >0, если направление общего к параллельным прямым перпендикуляра, *считаемое от* π_1 *к* π_2, будет образовать с ними угол $+\dfrac{\pi}{2}$

Для прямых, параллельных осям U, V характеризуемых числами λ_1, λ_2 и пересекающих основание в точках C_1, C_2 имеем

[1]) Этим способом указывать значение корня мы всегда будем пользоватьея.

$d = \overrightarrow{C_1 C_2} = C_1 0_1 + 0_1 C_2$. Т. к. $\frac{0_1 C}{C 0_2} = \lambda$, то $\frac{0_1 C}{1} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}$, Следоват.,

$$d = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1} \quad \ldots \ldots \ldots (8')$$

d будет > 0, если прямая λ_1 лежит *левее* прямой λ_2. Желая согласовать с предыдущим, мы должны сказать, что наши прямые направлены вниз ($//\, U$).

Пример. Расстояние между (V ($\lambda_1 = \infty$) и $-U$ ($\lambda_2 = 0$), т. е. отрезок $0_2 0_1$, есть -1. Чтобы и в этом случае расстояние $C_1 C_2$ получалось > 0 когда общий перпендикуляр образует угол $+\frac{\pi}{2}$ с направлением прямых, мы будем писать формулу ($8'$) в виде

$$d = \varepsilon \left(\frac{1}{\lambda_2 + 1} - \frac{1}{\lambda_1 + 1} \right) \quad \ldots \ldots (8)$$

где $\varepsilon = +1$ для прямых, параллельных оси V и $\varepsilon = -1$ для параллельных с U.

Координаты прямой, параллельной двум данным $\pi_1 (u_1, v_1)$, $\pi_2 (u_2, v_2)$ и проходящей на равном расстоянии от обеих, суть, очевидно,

$$\frac{u_1 + u_2}{2}, \; \frac{v_1 + v_2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots (9)$$

10. Для определения расстояния между прямой $\pi_1 (u_1, v_1)$ и точками $0_1, 0_2, 0$ проводим через эти точки прямые параллельные π_1. Координаты этих прямых будут соответственно $(0, u_1 + v_1)$, $(u_1 + v_1, 0)$ $\left(\frac{u_1 + v_1}{2}, \frac{u_1 + v_1}{2} \right)$. Применяя формулу (7), получаем

$$P_1 0_1 = p = \frac{u_1}{\varepsilon \sqrt{1 + (u_1 + v_1)^2}}, \; Q 0_2 = q = \frac{-v_1}{\varepsilon \sqrt{1 + (u_1 + v_1)^2}},$$

$$R 0 = r = \frac{u_1 - v_1}{2\varepsilon \sqrt{1 + (u_1 + v_1)^2}} \quad \ldots \ldots (10)$$

Согласно n° 8 p, q, r будут > 0 если перпендикуляры из 0_1, 0_2, 0 на данную прямую, проходимые *от их оснований* к точкам $0_1, 0_2, 0$, образуют с прямой угол $+\frac{\pi}{2}$. На этом основании мы будем называть выражения (10) формулами *расстояния от прямой до точки.*

§ 3. Преобразование координат.

11. Предложим себе решить такую (основную) задачу. Зная координаты прямой относительно данной («старой») системы координат, найти ее координаты относительно другой («новой») системы, положение которой относительно старой системы координат известно.

Не решая этой задачи во всей общности, займемся преимущественно теми случаями, когда новые оси противоположны (п° 8), перпендикулярны к основной прямой и находятся друг от друга в расстоянии, равном единице, иначе говоря тем случаем, когда одна из систем может быть получена из другой при помощи движения.

Геометрически совершенно очевидно, что старый коорд. двуугольник может быть совмещен с новым при помощи a) вращения на надлежащий угол вокруг средней точки, b) поступательного перемещения, приводящего старую среднюю точку в новую. Это последнее в свою очередь может быть заменено двумя (поступательными) перемещениями, при одном из которых средняя точка перемещается по основанию, а при другом—перпендикулярно к нему. Эти виды перемещений мы будем *для краткости называть* 1) *поворотом* (около средней точки), 2) *смещением* (осей U, V), 3) *переносом* (основания) и обозначать соответственно символами (R), (D), (T) [1]).

12. Называя координаты новой основной линии через (h,—h) получаем след. очевидные формулы *переноса*

$$u = U - h, \quad v = V + h \qquad (T) \quad (11a, b)$$

где U, V — новые координаты прямой и $h > 0$, если новое основание *выше* старого, и наоборот.

13. Положим, что новые оси U, V параллельны старым, а основание — общее. Полагая $d = 0\,0'$, где $0'$ — новая средняя точка, имеем (черт. 4), принимая во внимание знаки координат,— $-U + u = d\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha = (U + V)\,d$; $V = v + (U + V)\,d$, откуда

$$u = U\,(1 + d) + Vd; \quad v = -Ud + V\,(1 - d) \qquad (12a, b)$$

В этих формулах $d = 00' > 0$, если $0'$ вправо от 0.

Примечание. Формулы (12), будучи написаны в виде $u = U + d\,.\,\mathrm{tg}\alpha$ $v = V - d\,.\,\mathrm{tg}\alpha$ показывают (ср. (11), что смещение *вправо* на длину d для прямой (u, v) равносильно переносу основания *вниз* на длину $d\,.\,\mathrm{tg}\alpha$ $(\alpha = u + v)$, что геометрически очевидно.

14. Положим, что коорд. двууг.— k повернут (около 0) на угол φ. Угол α $(\mathrm{tg}\,\alpha = u + v)$ обратится в $\alpha' = \alpha - \varphi$ $(\mathrm{tg}\,\alpha' = U + V)$, откуда $\mathrm{tg}\,\alpha = (\alpha' + \varphi)$ (α). С другой стороны, расстояние прямой от 0 не изменится. След., $\dfrac{u - v}{\sqrt{1 + (u + v)^2}} = \dfrac{U - V}{\sqrt{1 + (U + V)^2}}$ или $u - v = \dfrac{(U - V)\cos\alpha'}{\cos\alpha}$ (β). Решая $u + v = \mathrm{tg}\,\alpha$ с (β) находим

$$u = \frac{\sin\alpha + (U - V)\,\mathrm{cs}\,\alpha'}{2\,\mathrm{cs}\,\alpha}, \quad v = \frac{\sin\alpha - (U - V)\mathrm{cs}\,\alpha'}{2\,\mathrm{cs}\,\alpha} \quad (13')$$

[1]) К этим преобразованиям, собственно говоря, следует присоединить преобразование определяемое формулами $u = -U$, $v = -V$.

Это и есть формулы поворота, которым однако с помощью (α) мы дадим другой вид. Имеем (β) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha' + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'} =$
$= \dfrac{(U+V)\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - (U+V)\sin\varphi}$ и (13′) $2u = \dfrac{(U+V)\operatorname{cs}\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - (U+V)\sin\varphi} +$
$+ \dfrac{U - V}{\cos\varphi - (U+V)\sin\varphi}$, откуда окончательно

$$u = \frac{1}{2}\frac{(U+V)\operatorname{cs}\varphi + \sin\varphi + (U-V)}{\cos\varphi - (U+V)\sin\varphi},\ v = \frac{1}{2}\frac{(U+V)\operatorname{cs}\varphi + \sin\varphi - (U-V)}{\cos\varphi - (U+V)\sin\varphi}$$
[(R) (13)

Формулы поворота получились дробные, как и можно было ожидать из того соображения, что основание может быть сделано параллельным любой прямой.

Преобразования (T), (D), (R) мы будем называть преобразованиями движения.

15. Рассмотрим некоторые простые преобразования координат, *не* принадлежащие к движениям.

a) Положим, именно, что оси u, v заменяются осями U, V им параллельными и находящимися друг от друга в расстоянии *e*, а основание и средняя точка остаются прежними.

Имеем (черт. 5) $V = v + \dfrac{e-1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $U = u + \dfrac{e-1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, откуда

$$u = U + \frac{1-e}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{(1+e)U + (1-e)V}{2e},\ v = V + \frac{1-e}{2}\operatorname{tg}\alpha =$$
$$= \frac{(1-e)U + (1+e)V}{2e} \qquad \text{(N)} \quad (14\,a, b)$$

В этих формулах, которые мы иногда будем называть формулами «сжатия» (N), *e* существенно положительная величина.

b) Положим, что ось V перенесена *вправо* на длину e_2 ($e_2 > 0$). Тогда, очевидно, $v = V - e_2\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{V - e_2 U}{1 + e_2}$ (α). Аналогично, для перемещения оси U *вправо* на длину e_1 ($e_1 > o$) получаем $u = U + e_1\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{U + e_1 V}{1 - e_1}$ (β). Применяя последовательно оба преобразования (α), (β) находим

$$u = U + e_1\frac{U+V}{1 - e_1 + e_2} = \frac{U(1+e_2) + Ve_1}{1 - e_1 + e_2},\ v = V - e_2\frac{U+V}{1 - e_1 + e_2} =$$
$$= \frac{V(1-e_1) - Ue_2}{1 - e_1 + e_2} \quad \dots\dots\dots \quad (15)$$

При $e_1=e_2$ находим формулы (12). При $e_2=-e_1$ $u=\frac{U(1+e_2)-Ve_2}{1+2e_2}$, $v=\frac{V(1+e_2)-Ue_2}{1+2e_2}$ т. е., если положить $e_2=\frac{e-1}{2}$, формулы (14)

16. Положим, наконец, что коорд. оси наклонены к основанию под углом Θ (черт. 6). Тогда $U+V=\frac{\sin\alpha}{\sin(\Theta-\alpha)}$ (α) и $\frac{u}{v}=\frac{U}{V}$ (β), т. к. $0_1, 0_2$ не меняются. Из (α) следует $\frac{u+v}{\sin\Theta}=\frac{U+V}{1+(U+V)\cos\Theta}$ и, в силу (β), $u=\frac{U\sin\Theta}{1+(U+V)\cos\Theta}$, $v=\frac{V\sin\Theta}{1+(U+V)\cos\Theta}$. (16)

Очевидно формулами (11)—(16)*) и теми, которые получаются решением их относительно U, V, разрешаются все случаи перехода от одной системы координат к другой.

§ 4. Уравнения. Кривые.

17. Система двух уравнений

$$u=u_0,\quad v=v_0,$$

как вытекает из предыдущего, изображает прямую. Система двух уравнений

$$\varphi(u, v)=0,\quad \psi(u,v)=0 \qquad (\alpha)$$

где φ и ψ функции какого угодно вида, имеет, вообще говоря, некоторое (конечное или бесконечное) число решений

$$u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2\ \ldots\ldots\ldots\ u_n,\ v_n$$

Условимся говорить, что пара чисел u, v изображает (мнимую) прямую и тогда, когда одно из них, или оба, комплексные. Тогда система (α) может быть, очевидно, истолкована, как изображающая некоторое (конечное или бесконечное) число (вещественных или комплексных) прямых. Спрашивается, как геометрически истолковать *одно* уравнение.

18. Уравнение

$$f(u, v)=0$$

из всех прямых плоскости выделяет бесконечное множество пряммх, координаты которых ему удовлетворяют. Давая одному из переменных, например *u*, определенное значение, мы для другого получим одно или несколько соответственных значений $v_0, v_1, \ldots\ldots$ Если $f(u, v)$ непрерывна, то взяв близкое к u_0 значение $u_0+\triangle u$, мы получим, вообще говоря, близкие к v_0 значения $v_0+\triangle v_0$, $v_1+\triangle v_1$, ... Две «близкие» прямые (u, v), $(u+\triangle u, v+\triangle v)$ определяют точку пересечения.

*) Строго говоря, вместо —(16) нужно взять более общую формулу $u=\frac{U\sin\Theta}{e+(U+V)\cos\Theta}$, которая выводится совершенно также, как (16), и не предполагает, что $0_1 0_2=1$.

При $\triangle u \to o$ эта точка будет, вообще говоря, стремиться к некоторому определенному предельному положению. Непрерывному изменению *u* будет отвечать непрерывный ряд точек на плоскости, расположенных по некоторому закону, определяемому уравнением $f(u, v) = o$, т. е. некоторая кривая линия. Переменная прямая, координаты которой удовлетворяют этому уравнению, будет, очевидно, касательной к кривой, и эту последнюю мы можем таким образом рассматривать, как образованную движением прямой (касательной).

Эти соображения заставляют предполагать справедливость (основного для аналитич. геометрии) предложения, на доказательстве которого мы не будем останавливаться:

Уравнение $f(u, v) = o$ геометрически изображает совокупность касательных к некоторой кривой, иначе говоря, самую кривую линию.

Это основное предложение мы поясним примерами

19. *Пример 1.* Уравнение $u - a = o$ удовлетворяется координатами таких, и только таких, прямых, для которых $u = a$. Легко понять, что все эти прямые проходят через точку, лежащую на оси U в расстоянии a от 0. Т. и уравнение $u = a$ есть уравнение *точки*, (лежащей на оси u).

Пример 2. Уравнение $u - k\, v = o$ говорит $\left(\frac{u}{v} = k\right)$, что все прямые, координаты которых ему удовлетворяют, проходят через постоянную точку основания (п^0 3) и, след., изображает эту точку.

Пример 3. Уравнение $1 + 2uv + v^2 = 0$, написанное в виде $(u + v)^2 + 1 = u^2$ или еще в виде $\frac{u^2}{(u+v)^2+1} = 1$ говорит (п^0 10), что расстояние от 0_1 до любой из прямых, координаты которых ему удовлетворяют, есть 1 ед. Уравнение изображает, след., *окружность* радиуса 1 ед. с центром в 0_1.

Пример 4. Уравнение $u^2 + v^2 + 1 = 0$ не может, очевидно, быть удовлетворено никакими вещественными u, v. Мы будем говорить, что это уравнение изображает *мнимую* кривую.

20. Обратно, если имеем семейство прямых, обладающих каким-либо общим свойством, которое может быть выражено *одним* уравнением

$$f(u, v) = o$$

то это семейство определяет, вообще говоря, кривую к которой каждая прямая семейства есть касательная, и которая называется *огибающей* семейства (своих касательных). Уравнение $f(u, v) = o$ и есть уравнение этой огибающей.

21. *Пример 1.* Найти уравнение окружности радиуса $^1/_2$ ед, с центром в средней точке. Имеем (черт. 7)

$$AC + CB = AO_1 + BO_2 = -u + v = AB = \frac{1}{cs\alpha} = \varepsilon\sqrt{1+(u+v)^2}.$$

Возвышая в квадрат и упрощая находим

$$4\,uv + 1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Пример 2).* Окружность радиуеа $^1/_2$ ед. катится по оси U. Найти уравнение кривой, описанной точкой M окружности. Пусть (черт. 8) t есть (переменный) угол, образованный радиусом катящегося круга, проведенным в точку M, с его начальным положением $0\,0_1$. Легко было бы доказать, что при всяком положении катящегося круга прямая MB, соединяющая M с точкой касания B, есть нормаль к кривой, а след., прямая MA — касательная. Имеем $u + v = tg\frac{t}{2}$ и $-v = OB = tg\frac{t}{2}$.

Исключая t находим уравнение *циклоиды*

$$u + v = tgu.$$

Примечание: Совокупность уравнений

$$u = 2\,tg\frac{t}{2},\quad v = -tg\frac{t}{2}$$

может также хорошо служить для изображения циклоиды как и полученное выше уравнение между u и v. Это замечание носит совершенно общий характер. Переменные координаты касательной к кривой могут быть даны как функции некоторого переменного параметра t

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t).$$

Уравнение между u и v получается исключением t из этой системы.

22. Кривые, уравнения которых могут быть приведены к виду

$$g\,(u,\ v) = o \qquad (\alpha)$$

где g полином от u, v, называются *алгебраическими*, остальные кривые *трансцендентными*.

Алгебраическая кривая называется *кривой n-ого класса*, если она не может быть изображена алгебраическим уравнеиием вида $g\,(u,\ v) = o$ степени меньшей чем n.

Преобразование координат не может изменить класса кривой. Т. к. формулы преобразования координат линейны относительно u, v (и U, V), то степень $g\,(u,\ v) = o$ не может повы-

*) K. Schwering p. 90.

ситься. След,, она не может и понизиться, т. к. тогда при обратном переходе (от U, V к u, v) она бы повысилась.

23. Очевидны след. замечания

a) Уравнения

$$g(u, v)=0, \quad Cg(u, v)=0$$

где C множитель, не зависящий от u, v, эквивалентны. Следовательно, уравнение кривой, не меняя его геометрического смысла, можно умножать на постоянный множитель,

b) Уравнение вида

$$g_1(u, v)\, g_2(u, v)=0$$

изображает совокупность двух кривых $g_1=0$, $g_2=0$.

Пример Уравнение $(u+v)^2+1=0$ изображает совокупность двух кривых первого класса $u+v+i=0$, $u+v-i=0$ $(i=\sqrt{-1})$

c) Решения системы

$$g_m(u, v)=0, \quad g_n(u, v)=0 \qquad (\alpha)$$

где g_m, g_n—полиномы степеней m и n, суть координаты общих касательных кривых $g_m=0$, $g_n=0$.
След., кривые порядков m и n имеют mn общих касательных. В частности, класс кривой есть число касательных, общих этой кривой и кривой 1-го класса.

24. В заключение приведем ряд простых соображений, дающих возможность по форме уравнения кривой сделать в некоторых случаях заключения об особенностях в геометрических свойствах кривой и ее положении

a) Прямые I; I' (черт. 9) называются *симметрическими относительно точки* (0), если они находятся от нее в равных расстояниях. Точки пересечения P, P^1 двух пар симметр. прямых находятся на одной прямой с 0 и $OP=OP^1$. Такие точки называются симметрическими относительно точки (0). Фигуры (кривые), составленные из симметричееких прямых (и точек) будем также называть симметрическими относ. 0, а точку 0—*центром симметрической* фигуры. Координаты симметр. относительно *средней* точки прямых связаны очевидной зависимостью

$$u_1=v_2, \quad v_1=u_2$$

След., для того, чтобы кривая, была симметрична относительно средней точки необходимо и достаточно, чтобы

$$f(u, v)=f(v, u) \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

b) Прямые I, I^1 назыв. *симметрич. относительно прямой* $(0_1\, 0_2)$, если эта прямая есть их биссектриса (черт. 10). Две пары симметр. прямых пересекаются в точках Q, Q^1, расположенных на перпендикуляре к прямой $(0_1\, 0_2)$ в одинаковом от нее расстоянии. Фигуры, составленные из симметр. прямых (и точек) будем называть симметричными относительно прямой, а самую прямую ($0_1\, 0_2$) *осью симметрии* фигуры.

Координаты прямых, симметр. относительно основания, связаны соотношениями

$$u_1 = -u_2,\quad v_1 = -v_2$$

След., для того, чтобы кривая была симметрична относительно основания, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(u, v) = f(-u, -v) \qquad \qquad (18)$$

c) Если уравнение кривой не содержит свободного члена, то основная линия касается кривой, и обратно

d) Если ось U (ось V) есть касательная к кривой $f(u, v) = o$ класса n, то уравнение кривой не содержит члена u^n (v^n). Действительно, разделив $f(u, v)$ на v^n (u^n) и полагая $\lim\left(\frac{u}{v}\right) = o$ $\left(\lim\frac{v}{u} = o\right)$, должны получить $o = o$. Справедливо и обратное. Ограничиваясь этими замечаниями, перейдем к систематическому изучению алгебраических кривых, которое естественно начать с кривых первого класса.

§ 5. Точка.

25. Линейное уравнение общего вида

$$au + bv + c = o, \qquad \qquad (19)$$

если $b \neq o$, может быть написано в виде

$$v = lu + n \qquad \qquad (20)$$

где $l = -\frac{a}{b}$ $n = -\frac{c}{b}$, При $u = o$, $v_0 = n$. Пусть прямая (u_1, v_1) есть касательная к (20). Тогда $\frac{v_1 - n}{u_1} = \frac{v_1 - v_0}{u_1} = l = \text{const.}$ (α).

Но (черт. 11) $v_1 - v_0 = CB$, $u_1 = 0_1 A$ и (α) может быть написано в виде $\frac{CB}{A0} = \frac{OD}{DC} = \text{const.}$ След., всякая прямая, координаты которой удовлетворяют ур-ию (20), проходит через (постоянную) точку D, т. е. ур-ие (20) есть уравнение точки (D). Если $b = o$, или $c = o$, то (19), как мы видели выше (п^0 19), есть также ур-ие точки. След., *всякое уравнение первой степени изображает точку.*

26. Положение всякой точки должно быть, вообще говоря, определено *двумя* параметрами, напр. (черт. 12) $pP = h$ (h бу-

дем считать всегда положительным) и отношением $\frac{O_1 p}{p O_2} = k$ Через P проводим произвольную прямую (u, v). Имеем

$$\frac{PQ}{NL} = \frac{MQ}{ML} \text{ или } \frac{\varepsilon h + u}{v + u} = \frac{k}{k+1}, \text{ откуда}$$

$$u - kv + \varepsilon h\,(k+1) = o \qquad (\varepsilon = \pm 1) \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

След., координаты всех прямых, проходящих через P, удовлетворяют *линейному* ур-ию (21). Координаты прямой, *не* проходящей через P, этому ур-ию *не* удовлетворяют. Пусть, в самом деле, для такой прямой $u_0 - kv_0 + \varepsilon h\,(k+1) = o$ и, след., $\frac{\varepsilon h + u_0}{v_0 + u_0} = \frac{k}{k+1}$. Через точку пересечения (u_0, v_0) с осью U и через P проведем прямую (u_0, v^1). Для этой прямой $\frac{\varepsilon h + u_0}{v^1 + u_0} = \frac{k}{k+1}$, и $v^1 = v_0$. Т. к. точки, лежащие на осях и средней линии, также изображаются уравнениями 1-ой степени, то *всякая точка выражается уравнением 1-ой степени.* Сравнение (19) с (21) дает $\frac{b}{a} = -k\,(22)\,\frac{c}{a} = \varepsilon h\,(k+1)$, откуда $h = \frac{\varepsilon c}{a - b}$. (23)

(23) показывает, что, разделив уравнение (19) на $\varepsilon\,(a - b)$, мы можем привести его к виду

$$\frac{\varepsilon a}{\varepsilon(a-b)}\,u + \frac{\varepsilon b}{\varepsilon(a-b)}\,v + \frac{\varepsilon c}{a-b} = o \quad . \; . \; . \; (24)$$

в котором геометрическое значение свободного члена вытекает из (23) и который мы будем называть *«нормальным»*.

27. Определим точку P пересечением двух прямых, проходящих через 0_1 и 0_2 $\left(0,\ m = -\frac{c}{b}\right)$ и $\left(n = -\frac{a}{c},\ 0\right)$. Исключая a и b из (19), приведем его к виду

$$\frac{u}{m} + \frac{v}{n} = 1, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (25)$$

удобному для построения, который будем называть уравнением *«в отрезках»*.

28. Очевидно, ур-ия точек 0_1, 0_2, 0 суть $u = o$, $v = o$, $u - v = o$. При $a = b$ $k = -1$, $h = \infty$. След., ур-ие вида $au + av + c = o$, т. е. вида

$$u + v = c \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26)$$

определяет беск.—удаленную точку, лежащую на всех прямых, для которых $\operatorname{tg}\alpha = u + v = c$. Можно сказать, что (26) определяет *направление*, для которого $\operatorname{tg}\alpha = c$. В частности, беск.-уд. точка основания имеет ур-ие $u + v = o$. Как особенно ясно показывает (25), ур-ие вида $c = o$ может быть истолковано, как ур-ие беск.-уд. точки осей.

29. Уравнение точки, лежащей на данной прямой (u_0, v_0), получим, принимая во внимание условие $a u_0 + b v_0 + c = o$. Это ур-ие можно, очевидно, написать в виде

$$a\,(u - u_0) + b\,(v - v_0) = o \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Если a, b остаются неопределенными, ур-ие (27) изображает бесчисленное множество (все) точек, лежащих на прямой (u_0, v_0), или, как будем говорить, *ряд* точек.

Пример Найдем ур-ие беск.-уд. точки прямой u_0, v_0. Полагая в (27) $a = b$ (п⁰ 28) получим $u + v = u_0 + v_0$.

30. Уравнение точки пересечения прямых $(u_0\ v_0)$, $(u_1\ v_1)$ получим, исключая из (27) отношение $\frac{a}{b}$ при помощи условия $a\,(u_1 - u_0) + b\,(v_1 - v_0) = 0$

$$\frac{u - u_0}{u_1 - u_0} = \frac{v - v_0}{v_1 - v_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28')$$

Этому ур-ию можно дать более симметричную форму, написав результат исключения a, b, c, из $a u + b v + c = o$, $a_1 u + b_1 v + c_1 = o$, $a_2 u + b_2 v + c_2 = o$ в виде определителя

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = o \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Заменяя «текущие» координаты u, v в (28) координатами прямой (u_2, v_2), получим условие пересечения 3 прямых в одной точке.

31. Координаты прямой, проходящей через две данные точки

$$a_1\ u + b_1\ v + c_1 = o;\ a_2\ u + b_2\ v + c_2 = o \qquad (\alpha)$$

найдутся решением системы ур-ий (α) В частности, эта прямая будет параллельна осям, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

32. Для того, чтобы три точки лежали на одной прямой $(u_0\ v_0)$ необходимо и достаточно, чтобы были совместны три ур-ия $a_i\ u_0 + b_i\ v_0 + c_i$ $(i = 1, 2, 3)$, т. е., чтобы

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = o \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

33. Координаты прямой, проходящей через данную точку $au+bv+c=o$ перпендикулярно (A) или параллельно (B) данной прямой (u_0, v_0) найдем решая системы

$$\left.\begin{aligned} a\,u + b\,v + c &= o \\ u + v &= -\frac{1}{u_0+v_0} = -\frac{1}{m} \end{aligned}\right\} (A) \qquad \left.\begin{aligned} au+bv+c &= o \\ u+v = u_0+v_0 &= m \end{aligned}\right\} (B)$$

Для (B)

$$u = -\frac{b\,(u_0+v_0)+c}{a-b}, \quad v = \frac{a\,(u_0+v_0)+c}{a-b} \qquad (c)$$

34. Чтобы найти расстояние между данной прямой $\pi_0\ (u_0, v_0)$ и данной точкой $au+bv+c=o$, можно через последнюю провести прямую параллельную данной (n^0 33, (c)). Искомое расстояние будет (n^0 8)

$$\delta = \frac{\dfrac{a\,(u_0+v_0)+c}{a-b} - v_0}{\varepsilon\sqrt{1+(u_0+v_0)^2}} = \frac{a\ u_0 + b\ v_0 + c}{(a-b)\,\varepsilon\sqrt{1+(u_0+v_0)^2}} =$$

$$= \frac{a\ u_0 + b\ v_0 + c}{a-b} \cos\alpha \quad . \ . \ . \ . \ . \ (30)$$

По этой формуле расстояние будет получаться положительным для точек, расположенных *влево* от (положительного направления) прямой (n^0 8). Для таких точек при $\varepsilon = +1$, $\dfrac{a\,u_0 + b\ v_0 + c}{a-b} > o$.

При $\varepsilon = -1$ $\delta > o$ для точек, для которых $\dfrac{a\ u_0 + b\ v_0 + c}{a-b} < o$.

Но т. к. прямая изменила свое направление на противоположное, то точки, для которых $\delta > o$, расположены опять *влево* от прямой. Т. о. формула (30) дает расстояние от прямой до точки считаемое по положительной нормали (т. е. по перпендикуляру, образующему с прямой угол $+\dfrac{\pi}{2}$).

Примечание: Из пред. вытекает, что всякая ось (u, v, ε) делит плоскость на две области: для всех точек одной из них (положительной полуплоскости) $\delta > o$, для всех точек другой $\delta < o$.

35. Расстояние между двумя данными точками $a_1\,u+b_1\,v+c_1=o$ $a_2\ u + b_2\ v + c_2 = o$ можно было бы найти аналогичным путем. Мы изберем другой. Координаты прямой, проходящей через данные точки, суть $\left(\dfrac{c_2\ b_1 - c_1\ b_2}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1}, \dfrac{c_1\ a_2 - c_2\ a_1}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1}\right)$ (n^0 31).

Далее (черт. 13),

$$0_1 p_1 = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}, \; 0_1 p_2 = \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}; \; \overline{p_1 p_2} = \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} - \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} \qquad (\alpha)$$

$$\text{т. к. } \lambda = -\frac{b}{a}, \text{ то } \overline{p_1 p_2} = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)} \qquad (*)$$

$$r = \frac{\overline{p_1 p_2}}{\cos\alpha} (\beta); \; \cos\alpha = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{\varepsilon \sqrt{(a_2 b_1 - a_1 b_2)^2 + \left[(c_2(a_1 - b_1) - c_1(a_2 - b_2)\right]^2}} \qquad (\gamma)$$

Отсюда окончательно

$$r = \frac{\varepsilon \sqrt{(a_2 b_1 - a_1 b_2)^2 + \left[c_1 (a_2 - b_2) - c_2 (a_1 - b_1)\right]^2}}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)} \qquad (31)$$

Желая, чтобы сохранилась основная теорема проекций (т. е. (β), мы должны ε в (31) и (γ) считать одним и тем же. При этом, если r считать существенно положительной величиной[1]), то знак ε определен формулой (*). Если же ε выбрать произвольно, то r может получиться отрицательным. Тогда направление (γ) противоположно направлению $P_1 P_2$. След., в том и другом случае направление *от* P_1 *к* P_2 характеризуется при помощи ε, знак которого таков же, как и знак (*).

36. Найдем координаты биссектрис прямых π_1 $(u_1\ v_1)$, π_2 $(u_2,\ v_2)$. При этом для краткости введем обозначения

$$u_i + v_i = k_i, \; \frac{1}{+\sqrt{1+(u_i+v_i)^2}} = N(\pi_i) = N_i$$

Через 0_1 проведем прямые, параллельные данным: $(0,\ u_1+v_1)$, $(0,\ u_2+v_2)$. Из определения биссектрисы $\frac{k_1 - k_i}{\varepsilon_1 N_i N_1} = \frac{k_i - k_2}{\varepsilon_2 N_i N_2}$ и

$$k_i = \frac{\varepsilon_1 k_1 N_2 + \varepsilon_2 k_2 N_1}{\varepsilon_1 N_1 + \varepsilon_2 N_2} \quad \ldots\ldots \quad (32^1)$$

Формула (32^1) дает направление биссектрисы угла между положительными направлениями (осями) π_1 и π_2. Такую биссектрису мы будем называть «главной» (или «первой») бисс-ой. Заменяя ε_1 в (32^1) на $-\varepsilon_1$ (или ε_2 на $-\varepsilon_2$), получим направление «вто-

[1]) Лучше сказать, если считать направление прямой $P_1 P_2$ совпадающим с направлением от P_1 к P_2.

рой» бисс-сы. Координаты бисс-с получаются решением уравнения точки пересечения $u(v_2-v_1)+v\ (u_1-u_2)+u_2v_1-u_1\ v_2=0$ с (32^1). Они будут

$$u=\frac{\varepsilon_1 N_1 u_2+\varepsilon_2 u_1 N_2}{\varepsilon_1 N_1+\varepsilon_2 N_2},\quad v=\frac{v_2 \varepsilon_1 N_1+v_1 \varepsilon_2 N_2}{\varepsilon_1 N_1+\varepsilon_2 N_2}\ . \tag{32}$$

37. *Задача*. Найти биссектрису острого угла. Взяв произвольно ε_1 (ε_2), в формуле $\cos\varphi=\dfrac{1-k_1 k_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 N_1 N_2}$ выбираем ε_2 (ε_1) так, чтобы $\cos\varphi>0$. Т. о. ε_1, ε_2 определены, и (32) дает решение.

38. *Задача*. Найти биссектрисы *внутренних* углов треугольника π_i $(u_i\ v_i)$, $(i=1,\ 2,\ 3)$. *Внешние* углы обозначим через A, B, C. Геометрически очевидно, что (положит.) направления прямых π_i можно выбрать так, что движение точки по периметру будет происходить все время в положительном (или отрицательном) направлении. Треугольник для которого это имеет место, будем называть «ориентированным». Для ориентированного треугольника внешние биссектрисы будут главными. Покажем, как выбрать направления сторон (т. е. ε_1, ε_2, ε_3) тр-ка, чтобы он был ориентированным «ориентировать» тр-к)

a) Взяв произвольно ε_1, выберем ε_2 так, чтобы $\sin C=$ $=\dfrac{k_2-k_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 N_1 N_2}>0$ и ε_3 так, чтобы $\sin A=\dfrac{k_3-k_2}{\varepsilon_3 \varepsilon_2 N_3 N_2}>0$. Если $\dfrac{k_1-k_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_3 N_1 N_3}>0$, то задача решена. Заметим, что в этом случае все ε_i можно заменить на $-\varepsilon_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$,

b) Если $\dfrac{k_1-k_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_3 N_1 N_3}<0$, то выберем ε_2 так, чтобы $\sin C<0$ (ε_2 придется изменить на $-\varepsilon_2$) и ε_3 так, чтобы $\sin A<0$ (ε_3 будет тоже, что и в случае a),

c) Можно поступить иначе (в случае b). Взяв произвольно ε_1, выберем ε_3 (а не ε_2!) так, чтобы $\sin B=\dfrac{k_3-k_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_3 N_1 N_3}>0$ и ε_2 так, чтобы $\sin A>0$. Тогда и $\sin C>0$ (ибо это в сущности тот же случай b)),

d) Можно, наконец, дать такое правило. За $(u_1,\ v_1)$ примем ту прямую, для которой $k_i=u_i+v_i$ — наибольшее (наименьшее), за $(u_3,\ v_3)$ ту, для которой k_i — наименьшее (наибольшее). Тогда взяв $\varepsilon_1=+1$, $\varepsilon_2=-1$, $\varepsilon_3=+1$ $(\varepsilon_1=-1,\ \varepsilon_2=+1,\ \varepsilon_3=-1)$ получим ориентированный треугольник. Показать, что указанные способы ведут к цели, можно след. образом. Расстояние от стороны BC (u_1 v_1) до вершины A, уравнение которой (n^0 30) $(v_3 - v_2)\, u + (u_2 - u_3)\, v + u_3 v_2 - u_2 v_3 = 0$ есть (30)

$$h_1 = \frac{u_1 (v_3 - v_2) + v_1 (u_2 - u_3) + u_3 v_2 - u_2 v_3}{\varepsilon_1 (k_3 - k_2)\, N_1} = -\frac{\triangle}{\varepsilon_1 k_3 k_2 N_1} = \frac{-\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \triangle}{\sin A.\ N_1} \qquad (**)$$

где $\triangle$ определитель

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Т. к. знаки sin A, sin B, sin C одинаковы, то тр-к ориентирован. Для решения задачи остается применить формулы (32)

39. Дадим этим результатам геометрическое истолкование. При обходе ориентированного тр-ка по периметру в положит. направлении площадь может оставаться влево (такой треугольник будем называть «положительным») или справа («отрицательный» треугольник). Понятно, что для отрицательных треугольников $h_i < 0$, для положительных $h_i > 0$. Поэтому формула (**) может служить для различения этих случаев, но мы возьмем другое выражение: в произведении h_1 h_2 h_3 откинем множители N_1 N_2 N_3, $\triangle^2$, не оказывающие влияния на знак. Произведение

$$\top = -\triangle \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 (k_2 - k_1)(k_3 - k_2)(k_1 - k_3) = -\triangle\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \sin A \ \sin B \ \sin C \qquad (**)$$

имеет тот же знак и может служить для различения положит. тр-ков ($\top > 0$) от отрицательных, если ε_1 ε_2 ε_3 выбраны, или для ориентирования тр-ка в желательном смысле. Из (**) следует, кроме того, что

$$\sqcap (k) = (k_2 - k_1)(k_3 - k_2)(k_1 - k_3) = \sin A \ \sin B \sin C \qquad (*_**)$$

Заданием треугольника определяются таким образом знаки углов, а след. (**) и $\varepsilon_1 \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \varepsilon_3$, $\varepsilon_3 \varepsilon_1$ и (двузначно) ε_1, ε_2, ε_3

a) Пусть, напр., $\sqcap (k) > 0$. Тогда один из множителей, напр. $k_3 - k_2 > 0$, другие < 0 (т. к. их сумма—нуль). Значит (**), $\varepsilon_2 \varepsilon_3 > 0$, $\varepsilon_3 \varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 < 0$ и $\varepsilon_1 = \mp 1$ $\varepsilon_2 = \pm 1$ $\varepsilon_3 = \pm 1$. Одна система решений дает (в зависимости от знака $\triangle$) положительный треугольник (черт. 14a), другая отрицательный (14b), (см. n^0 38, a)

b) Пусть еще $\sqcap (k) < 0$ и $k_3 - k_2 < 0$. Тогда нельзя выбрать ε_i так чтобы sin A, sin B, sin C > 0, т. к. система неравенств $\varepsilon_3 \varepsilon_2 < 0$, $\varepsilon_1 \varepsilon_3 > 0$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$ невозможна. Но можно положить $\sin A < 0$ (черт. 15) (см. n^0 38, b) или

c) изменить порядок сторон (см. n^0 38, c) (черт. 16)

Заметим, наконец, что из $\sqcap(k) > o$ вытекает $k_1 > k_2 > k_3$ или $k_2 > k_3 > k_1$ или $k_3 > k_1 > k_2$. След., можно положительным вращением привести сторону $(u_1 v_1)$ в совпадение с (u_2, v_2) и т. д. При таком движении площадь тр-ка останется *влево*. Иначе говоря, если $\sqcap(k) > o$, то при обходе тр-ка по периметру *в порядке сторон* 123 (или 231, или 312) площадь его будет слева, при $\sqcap(k) < o$ справа. Тр-ки, для которых имеет место первое, будем называть *левыми*, другие *правыми*..

40. Предложим себе вычислить площадь треугольника по заданным уравнениям $a_i u + b_i v + c_i = o$ его вершин (P_i) $(i = 1, 2, 3)$. Ясно, что выбирая направления сторон (π_i) по правилу n⁰ 35, мы получим ориентированный тр-к. Действительно,

$$h_3 = \frac{a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) + b_3(c_1 a_2 - c_2 a_1) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{\varepsilon_3 (a_3 - b_3)\, N(\pi_3)\, (a_2 b_1 - a_1 b_2)} =$$

$$= \frac{\triangle'}{\varepsilon_3 (a_3 - b_3) \sqrt{(a_2 b_1 - a_1 b_2)^2 + [c_1(a_2 - b_2) - c_2(a_1 - b_1)]^2}}$$

где $\triangle'$ определитель (29) n⁰ 32. Т. к. $\varepsilon_3 \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)} > o$,

то знак $\varepsilon_3 (a_2 b_1 - a_1 b_2)$ одинаков со знаком $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)$ и знак h_3 зависит только от $\dfrac{\triangle^1}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)}$, и один и тот же для всех h.

Искомая площадь $J = {}^1/_2\, r h_3$, где r определено формулой (31). След.

$$J = {}^1/_2 \frac{\triangle^1}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)} \quad \ldots\ldots (33^1)$$

где ε_3 исчезло, т. к. оно определено тем же правилом для r и h.

Имеем далее:

$$\sin P_1 = -\frac{(a_1 - b_1)\triangle^1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3 N(\pi_2) N(\pi_3)(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_3 b_1 - a_1 b_3)}.$$

Знак знаменателя одинаков со знаком $(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ (n⁰ 35). След., знак $\sin P'$ *обратен* знаку $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)\triangle^1$. Желая, чтобы площадь левого тр-ка выражалась положительным числом, мы будем писать $(33')$ в виде

$$J = -{}^1/_2 \frac{\triangle^1}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)} \quad \ldots (33)$$

41. Площадь треугольника, заданного координатами сторон, вычислим при помощи формулы (33)

$$\triangle^1 = \begin{vmatrix} v_2 - v_1 & u_1 - u_2 & u_2 v_1 - u_1 v_2 \\ v_3 - v_2 & u_2 - u_3 & u_3 v_2 - u_2 v_3 \\ v_1 - v_3 & u_3 - u_1 & u_1 v_3 - u_3 v_1 \end{vmatrix} = (u_2 v_1 - u_1 v_2) \triangle +$$

$$+ (u_3 v_2 - u_2 v_3) \triangle + (u_1 v_3 - u_3 v_1) = - \triangle^2.$$

Т. к. $a_1 - b_1 = k_3 - k_2$ и т. д:, то

$$J = + {}^1/_2 \frac{\triangle^2}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_2)(k_1 - k_3)} \quad . \; . \; . \; (34)$$

и она будет положительной для левого треугольника (п°39)

42. Положим, что дано n точек $a_i u + b_i v + c_i = o$ или n прямых $\pi_i (u_i, v_i)$, образующих выпуклый многоугольник, площадь которого требуется определить.

Если порядок сторон или вершин неизвестен, то его придется предварительно установить, напр. следующим образом. Взяв произвольно одну из вершин за 1-ую P_1 соединяем ее с другой P^1, определяем знаки расстояний до P^1 остальных вершин. Если они одинаковы, то прямая $P_1 P^1$ есть сторона, если нет,—выбираем ту вершину P_2, для которой это имеет место. При помощи второй вершины выбираем P_3 так, чтобы знаки расстояний всех остальных вершин были одинаковы между собой и с теми, которые получились при выборе P_2 и т. д. Т. о. можно получить положительный многоугольник. Разбивая его на треугольники диагоналями, проведенными из P_1, можем, очевидно, написать

$$J = -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^{i=n-1} \frac{\triangle_{1,\, i,\, i+1}}{(a_1 - b_1)(a_i - b_i)(a_{i+1} - b_{i+1})} \quad . \; . \; 33^*)$$

Для (выпуклого) положительного многоугольника $(u_1 v_1)\ldots\ldots(u_n, v_n)$ очевидно получили бы

$$J = {}^1/_2 \sum_{i=2}^{i=n-1} \frac{\triangle_{1,\, i,\, i+1}}{(k_i - k_1)(k_{i+1} - k)(k_1 - k_{i+1})} \quad . \; . \; (34^*)$$

43. Напишем уравнение

$$a_1 u + b_1 v + c_1 + k(a_2 u + b_2 v + c_2) = o \quad . \; . \; . \; . \; (35)$$

где k есть параметр. При определенном значении k ур-ие (35) изображает точку. При неопределенном k можем очевидно истолковывать (35), как ур-ие бесчисленного множества точек. Все эти точки лежат на прямой, соединяющей точки $a_1 u + b_1 v + c_1 = o\ (P_1)$, $a_2 u + b_2 v + c_2 = o\ (P_2)$, т. к. ее координаты удовлетворяют (35) *при всяком значении k*. Обратно, всякая точка, лежащая на указанной прямой, может быть изображена ур-ием (34). Пусть

$au + bv + c = o$ такая точка. Проведем через нее прямую (u_0, v_0), отличную от прямой P_1P_2. Имеем для определения k $a_1u_0 + b_1v_0 + c_1 + k(a_2u_0 + b_2v_0 + c_2 = o$. Результат исключения k из этого ур-ия и (35) можем написать в виде

$$(a_2u_0 + b_2v_0 + c_2)\,(a_1u + b_1v + c) = \\ = (a_1u_0 + b_1v_0 + c_1)\,(a_2u + b_2v + c = o \quad . \; . \; . \; . \; (36)$$

Ур-ие (35) мы будем называть уравнением *ряда*.

44. Найдем уравнение точки, лежащей посредине между двумя данными. Для этой точки $\frac{c_1 + kc_2}{k_1 + kk_2} = {}^1/_2\left(\frac{c_1}{k_1} + \frac{c_2}{k_2}\right)$(№26) откуда $k = \frac{k_1}{k_2} = \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2}$. Т.о. левая часть ур-ия искомой середины

$$\frac{a_1}{a_1 - b_1}u + \frac{b_1}{a_1 - b_1}v + \frac{c_1}{a_1 - b_1} + \frac{a_2}{a_2 - b_2}u + \frac{b_2}{a_2 - b_2}v + \frac{c_2}{a_2 - b_2} = o \quad (37)$$

есть сумма левых частей ур-ий конечных точек, приведенных к нормальному виду.

45. В формулы преобразования координат можно было бы попытаться ввести координаты новых осей и уравнения новой средней точки. Приводим без доказательства некоторые получающиеся формулы.

a) При параллельном перенесении средней точки в точку $au + bv + c = o$ получаем

$$u = \frac{c}{b - a} + \frac{3b - a}{2(b - a)}U + \frac{b + a}{2(b - a)}V,$$

$$v = \frac{-c}{a - b} \quad \frac{-(b + a)U + (b - 3a)V}{2(a - b)} \quad (11',12')$$

в которых свободный член соответствует „переносу“, а другие „смещению“.

b) Перенос оси V в точку $mu + nv = o$ дает

$$u = -\frac{mU + (n - m)V}{n} \quad (15')$$

c) Поворот коор. двууг-ка около средней точки до совпадения с новым основанием (u_0, u_0)

$$u = \frac{(U + V) + 2u_0 + (U - V)\sqrt{1 + 4u^2}}{1 - 2u_0(U + V)}, \quad v = \ldots\ldots\ldots (13')$$

46. Отказываясь в дальнейшем от (молчаливого) допущения, что коэффициенты в уравнении точки—вещественные числа, мы будем говорить, что линейное ур-ие всегда изображает (вещественную или мнимую) точку.

Если соответствующие коэффициенты в уравнениях двух точек суть сопряженные комплексные числа (или могут быть сделаны таковыми), то (мнимые) точки, ими изображаемые, будем называть „сопряженными".

Легко видеть, что мнимая точка

$$(a+bi)u+(c+di)v+e+fi=o$$

лежит на вещественной прямой, проходящей через точки

$$au+cv+e=o \qquad bu+dv+f=o$$

На той же прямой лежит и точка

$$(a-bi)u+(c-di)v+e-fi=o$$

Т. о. через две сопряженные мнимые точки проходит вещественная прямая.

Другое очевидное предложение того же характера. Середина между двумя сопряженными точками есть вещественная точка.

Пример. Середина между точками $u+v+i=o$, $u+v-i=o$ есть вещ. беск.-уд. точка $u+v=o$

§ 7. Пара точек.

47. На основании пп° 23 и 45 мы можем говорить, что алгебраическое уравнение степени n

$$f(x,\ y)=o$$

левая часть которого разлагается на n линейных (вещественных или комплексных) множителей вида:

$$a_i u+b_i v+c_i \qquad (i=1\ldots n)$$

изображает «группу» n точек

$$a_i u+b_i v+c_i=o$$

Отметим некоторые особенно простые случаи этого предложения

а) уравнение вида

$$f_n(u)=o \quad f_n(v)=o$$

изображает n точек, лежащих на оси U (оси V)

в) однородное урав-ие степени n изображает группу n точек, лежащих на основной линии.

Действительно, в этом случае $f_n(u,v)=u^n f_n\left(1,\dfrac{v}{u}\right)=0$

Если λ_1, λ_2 λ_n суть корни уравнения $f_n\left(1,\dfrac{v}{u}\right)=0$, то

$$f_n(u,v)=u^n f\left(1,\frac{v}{u}\right)=u^n\left(\frac{v}{u}-\lambda_1\right)\ldots\ldots\left(\frac{v}{u}-\lambda_n\right)=(v-\lambda_1 u)$$

$(v-\lambda_2 u)\ldots\ldots(v-\lambda_n u)=0$, что и доказывает сказанное.

Изследуем с этой точки зрения общее уравнение 2-й степени,

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2du + 2ev + f = o \qquad (I)$$

допускающее элементарное трактование.

48. Допуская, что $a \neq o$ и разрешая (I) относительно u,

$$u = \frac{-(bv+d)+\varepsilon\sqrt{(b^2-ac)\,v^2+2\,(bd-ae)+d^2-af}}{a} \qquad (\alpha)$$

Для того, чтобы подкоренное выражение было точным квадратом, необходимо и достаточно, чтобы

$$(bd-ae)^2-(b^2-ac)\,(d^2-af) = -a\triangle = o \qquad (\beta)$$

Здесь буквой $\triangle$ обозначен определитель

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \qquad (II)$$

носящий название „дискриминанта" уравнения (I).

Обозначим (алгебраические) дополнения элементов этого определителя соответствующими большими буквами так что $cf - e^2 = A$, $ed - bf = B$ и т. д. и, напр., (β) может быть написано в виде $E^2 - CF = O$ (6). Как видно, C и F одного знака и того же знака A (т, к. (I) могли бы разрешить относительно v). Т.о. для того чтобы уравнение 2-й степени изображало *пару* точек, необходимо и достаточно, чтобы $\triangle = 0$. При этом если $b^2 - ac = -F$ (или $-C$, или $-A$) $< O$,— обе точки мнимые. Если $b^2 - ac = o$, то (β) и $bd - ae = o$. След., ур-ие будет изображать пару вещественных, мнимых, совпадающих точек, смотря по тому, будет ли $-C = d^2 - af$ больше, меньше или равно нулю.

Результаты нашего исследования сопоставим в табличке:

$\triangle = 0$	$A+C+F<0$	пара вещ. точек.
	$A+C+F=0$	„ совп. „ (двойная точка)
	$A+C+F>0$	„ мнимых точек

Это есть „*проективная*" классификация пар точек, не делающая различия между обыкновенными (собственными, конечными) и бесконечно-удаленными (несобственными) точками.

49. Если выделим беск.-уд. точки, то получим *аффинную* классификацию.

В силу (β)

$$f(u,v) = \left[a\sqrt{-F}u + \sqrt{-F}(b-\sqrt{-F})v + d\sqrt{-F} - E\right]\left[a\sqrt{-F}u + \right.$$
$$\left. + \sqrt{-F}\,(b+\sqrt{-F})\,v + d\sqrt{-F} + E\right] = O \qquad (\gamma)$$

Для того, чтобы (только) одна из точек была беск. удаленной необходимо (n⁰ 28), чтобы $a = b + \sqrt{b^2 - ac}$ или чтобы $a = b - \sqrt{b^2 - ac}$ т. е. чтобы $(a - b)^2 = b^2 - ac$ или

$$a + c - 2b = o \qquad \text{(III)}$$

(Левую часть равенства (III), играющую важную роль в дальнейшем, мы всегда будем обозначать буквой η). В этом случае ($\eta = o$) F необходимо < 0 и т. о. не может быть ни мнимых, ни совпадающих точек, чте геометрически очевидно. Ясно, что эти условия ($\eta = o, F \neq o$) и достаточны. Наконец, если $F = o$ (а след. и $E = o$), то $a = b = c$, $d = e$ и обе точки беск.-удаленные (и обратно). В этом случае ур-ие (I) может быть написано в виде

$$a(u + v)^2 + 2d(u + v) + f = o$$

который показывает, что точки будут вещественные, совпадающие, мнимые смотря по тому, будет ли $d^2 - af = e^2 - cf = -A = -C > o, = o, < o$. Результаты резюмируем в таблице·

$$\triangle = 0$$

	$\eta \neq 0$	$\eta = 0$	
		$F \neq 0$	$F = 0$
$A + C + F < 0$	вещ. разл.	веществ. конечная и б. уд-ая.	вещ. различн. беск.-удаленные
$A + C + F = 0$	„ совпад.	—	вещ. совпад. беск.-удаленные
$A + C + F > 0$	мним. (сопряж.)	—	мним. (сопряж.) беск.-уд.

50. В изложенной связи не было надобности рассматривать предположения $a = b = c = o$. В дальнейшем однако будут встречаться случаи, когда желательно рассматривать линейное уравнение

$$du + ev + f = o$$

как „выродившееся“ уравнение второй степени.

Итак предполагаем, что $a = b = c = o$, а след., $A < o$, $C < o$, $\eta = o$, $\triangle = o$· Однако заключение, что обе точки беск.-уд., сделать нельзя, т. к. в этом случае из $a = b = c = \triangle = o$ не вытекает, что $d = e$. Будем рассуждать так. Пару, состоящую из беск.-уд. точки и конечной можно изобразить ур-ием $(lu + mv + n)$ $(u + v + k) = o$. Здесь $F = -b^2 + ac = \left(\frac{l+m}{2}\right)^2 - lm = \left(\frac{l-m}{2}\right)^2$, что неравно нулю, если $l \neq m$. Это имеет место при всяком k, а, след. и в пределе ($\lim k = \infty$). Но при $k = \infty$ получаем $lu + mv + n = o$ и к условию $F = o$ добавляется $l = m$.

Случай ур-ия нулевой степени не нуждается в особом рассмотрении, т. к. тогда $a = b = c = A = C = F = \triangle = o$ $d = e$ ($= o$) Следовательно, для случая $a = b = c = o$ наша таблица должна быть дополнена следующей.

$\triangle = \eta = F = O = a = b = c = o$		
	$d \neq e$	$d = e$
$A + C + F = o$	вещ. беск.-уд. и конечн.	вещ. различн. беск.-уд.
$A + C + F = o$	—	вещ. совпад. беск.-уд.

51. Предложим себе найти уравнение точки, делящей пополам расстояние между точками пары

$$l(u - u_0)^2 + 2m(u - u_0)(v - v_0) + n(v - v_0)^2 = o$$

Если обозначить $k = \sqrt{m^2 - ln}$, то ур-ия точек, приведенные к нормальному виду, будут

$$\frac{lu}{l - m + k} + \frac{m - k}{l - m + k} + \frac{-lu_0 + v_0(-m + k)}{l - m + k} = 0;$$

$$\frac{lu}{l - m - k} + \frac{m + k}{l - m - k} + \frac{-lu_0 - v_0(m + k)}{l - m - k} = 0$$

Полусумма левых частей этих ур-ий (n^0 44), приравненная 0, есть

$$(l - m)u + (m - n)v - \left[(l - m)u_0 + (m - n)v_0\right] = o$$

т. е. $$(l - m)(u - u_0) + (m - n)(v - v_0) = o \quad . . . (38)$$

Для ур-ия общего вида (I) ур-ие „середины" было бы (n^0 49γ)

$$(a - b)u + (b - c)v + (d - e) = o \quad . . . . . (39)$$

Пример: ур-ие

$$(u + v)^2 + 1 = o \quad . . . . (40)$$

есть ур-ие пары мнимых различных беск.-удаленных точек. Ур-ие средины (39) $u + v = o$ (ср пп^0 23, 46).

§ 8. Окружность.

52. Формула (30) $\delta = \dfrac{lu + mv + n}{\varepsilon(l - m)\sqrt{1 + (u + v)^2}}$, если рассматривать в ней δ, как постоянное, u, v, как переменные, бу-

дет, очевидно, уравнением окружности радиуса δ с центром в точке $lu+mv+n=o$. Написав ее в виде

$$(lu+mv+n)^2-\delta^2(l-m)^2\left[(u+v)^2+1\right]=o$$

заключаем: для того чтобы ур-ие 2-ой степени (I)

$$f(u,v)=au^2+2buv+cv^2+2du+2ev+f=o \qquad (I)$$

изображало окружность, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число k, чтобы

$$f(u,v)+k\left[1+(u+v)^2\right]$$

было квадратом линейной функции $(lu+mv+n)$. Понятно, что при $k<o$ окружность получается мнимая

53. Для того, чтобы

$$f(u,v)+k\left[1+(u+v)^2\right]=(a+k)u^2+2(b+k)uv+(c+k)v^2+ +2du+2ev+f$$

была квадратом линейной функции, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия

a) $(b+k)^2=(a+k)(k+c)$ или $b^2+2bk=(a+c)k+ac$ (α)

b) $e^2=(c+k)\ (f+k)$,, $-e^2+cf+(c+f)k+k^2=o$ (β)

c) $d^2=(a+k)\ (f+k)$,, $-d^2+a+(a+f)k+k^2=o$ (γ)

Т.о. k должно удовлетворить трем ур-иям (α, β, γ), для чего необходимо, чтобы существовали два условных уравнения, которые получим исключая k из (α), (β), (γ). Эти условные ур-ия заменим равносильным им

$$(a+k)e=(b+k)d \quad (\alpha); \quad (b+k)e=(c+k)d \quad (\beta);$$
$$de=(b+k)\ (f+k) \text{ т. е. } k^2+k(b+f)-de+bf=o \quad (\gamma)$$

Исключая k из (α) и (β) находим $ae-bd=be-cd$. Это условие будем писать в виде

$$G=d(b-c)+e(b-a)=o\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (41)$$

исключение k из (α) и (γ) дает

$$(ae-bd)^2+(b+f)\ (d-e)\ (ae-bd)-(d-e)^2(de-fb)=$$
$$=(ae-bd)\left[d(b-c)+f(d-e)\right]+(d-e)^2\ (bf-de)=o$$

причем $(ae-bd)$ в квадратных скобках исключено с помощью (41). Применяя (41) еще раз находим

$$e(b^2-ac)-e(d-e)^2+f(b-c)\ (d-e)=o\ .\ .\ .\ (42a)$$

Ясно, что исключая k из (β) и (γ) должны получить

$$d(b^2-ac)-d(d-e)^2+f(b-a)\ (e-d)=o\ .\ .\ .\ (42b)$$

Вычитая находим второе нужное нам условие в виде

$$T_c=ac-b^2+(d-e)^2-f(a+c-2b)=o\ .\ .\ .\ .\ (42)$$

54. Найдем уравнение центра и радиус окружности, заданной общим ур-ием (I) $f(u, v) = o$. Для k из (α) следует

$$k = \frac{b^2 - ac}{a + c - 2b} = \frac{b^2 - ac}{\eta}$$

$$l^2 = a + k = \frac{(a-b)^2}{\eta}, \quad m^2 = c + k = \frac{(c-b)^2}{\eta}; \quad n^2 = f + k =$$

$$= \frac{f\eta + b^2 - ac}{a + c - 2b} = \frac{(d-e)^2}{\eta}.$$ Кроме того,

$$b + k = lm = \frac{(a-b)(b-c)}{\eta}, \quad d^2 = ln, \quad e^2 = mn \qquad (\delta)$$

След., ур-ие центра будет

$$(a - b)u + (b - c)v + d - e = o \quad \ldots\ldots (43)$$

где знаки выбраны так, а не иначе, в силу равенств (δ). Наконец

$$r^2 = \frac{k}{(b-m)^2} = \frac{k}{\eta} = \frac{b^2 - ac}{\eta^2} \quad \ldots\ldots (44)$$

откуда видно, что при $b^2 - ac < o$ для радиуса получаем мнимое число, а для центра вещественную точку (т. к. η всегда можем считать положительным).

Пример: $4uv + 1 = 0$; $\eta = 4$, $k = 1$ $r = 1/2$. Уравнение центра $u - v = o$.

54. Специальная форма ур-ия окружности

$$(lu + mv + n)^2 - k\left[1 + (u + v)^2\right] = o \quad \ldots\ldots (45)$$

обнаруживает некоторые замечательные свойства этой кривой.

a) Касательные к любой окружности, проведенные из ее центра, проходят через (постоянные) точки

$$u + v + i = o, \quad u + v - i = o \quad \ldots\ldots\ldots (46)$$

т. к. независимо от l, m, n, k координаты должны удовлетворять ур-ию пары

$$(u + v)^2 + 1 = o \quad \ldots\ldots\ldots (40)$$

b) Касательные к окружности, проведенные через точки (46), пересекаются в ее центре, т. к. координаты их должны удовлетворять ур-ию

$$(lu + mv + n)^2 = o \qquad (\alpha)$$

При этом из каждой точки (40) можно провести только одну или лучше (см. (α)) две совпадающие касательные, что возможно лишь в том случае, когда точки лежит на кривой. След., *все окружности проходят через две постоянные точки плоскости (46)*. Эти точки называются „*циклическими*" точками. Обратно, окружности суть *единственные* кривые второго класса, проходящие через циклические точки. Подставляя в (I) $u = i - v$, находим

$$\eta v^2 + 2\left[i(b-a) + e - d\right]v + 2di - a + f = o \qquad (\beta)$$

Для того, чтобы обе касательные, проведенные из $u + v + i = o$ совпадали, нужно, чтобы был нулем дискриминант ур-ия (β)

$$-(b-a)^2 + 2(b-a)(e-d)i - 2\eta di + (a-f)\eta + (d-e)^2 = o$$

Это условие распадается на два, которые после приведения дают

$$G = o \qquad T_c = o.$$

c) Если в ур-ии (45) считать k переменным, то оно будет, очевидно, изображать семейство концентрических окружностей. Координаты касательных, проходящих через (общий) центр не зависят от *k*. След., семейство концентрических окружностей можно рассматривать, как совокупность (Schaar) окружностей, имеющих двойное касание в циклических точках.

55. В заключение найдем ур-ие окружности, касающейся трех данных прямых (u_i, v_i) $(i = 1, 2, 3)$.

Напишем ур-ие окружности в виде

$$lu + mv + n - \varepsilon\sqrt{k}\sqrt{1 + (u+v)^2} = o$$

и присоединим к нему условия

$$lu_i + mv_i + n - \varepsilon_i\sqrt{k}\sqrt{1 + (u_i + v_i)^2} = o \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Исключая из 4-х ур-ий $l, m, n, -\sqrt{k}$ получим

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 & \varepsilon\sqrt{1+(u+v)^2} \\ u_1 & v_1 & 1 & \varepsilon_1\sqrt{1+(u_1+v_1)^2} \\ u_2 & v_2 & 1 & \varepsilon_2\sqrt{1+(u_2+v_2)^2} \\ u_3 & v_3 & 1 & \varepsilon_3\sqrt{1+(u_3+v_3)^2} \end{vmatrix} = 0$$

ур-ие искомых окружностей, которых получится четыре в зависимости от знаков ε. (47)

Ueber die parallelen Linienkoordinaten.

S. Dudin.

In der vorliegenden Abhandlung entwickelt der Verfasser den elementaren (metrischen) Teil der analytischen Geometrie der Gerade und des Punktes, indem er ein tangentielles Koordinatensystem im Grunde legt, auf welches schon im 1829 *Chasles* hinwies und das später von *Unverzagt*, *Schwering* und *D'Ocagne* entwickelt wurde.

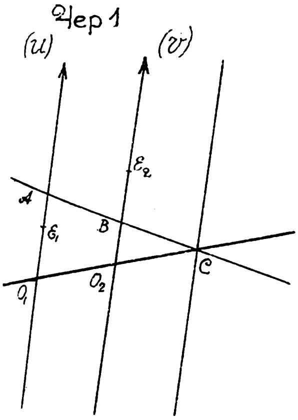
Die Abhandlung war zum Drucke vorbereitet, als dem Verf. Schwering's Brochure „Theorie und Anwendungen der Linienkoordinaten" (Leipz 1884) zu Händen kam, in welcher die Resultate des Verf. wesentlich enthalten sind. Trotzdem entschied sich derselbe nach einigem Bedenken dennoch dazu seine Schrift zu veröffentlichen, weil ihm in der russichen mathematischen Litteratur keine Arbeit bekannt ist, welche den parallelen Koordinaten gewidmet ist, während doch ihre Kenntniss gegenwärtig nicht ohne Bedeutung ist (in der Nomographie).

Ausserdem entwickelt der Verf. sowohl in diesem (ersten) Teil als auch in den folgenden einige Fragen ausführlicher oder in einem anderen Zusammenhang als es Schwering getan hat (z. B, Koordinatentransformation, Bissectrixen, Doppelzeichensfragen u. s. w.) Anderseits hat der Verf. aus dem Buch Schwerings № 21,$_2$ entnommen.

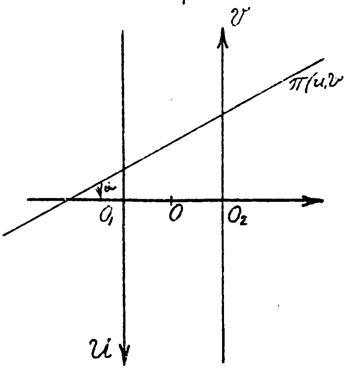
Die Abhandlungen d'Ocagne's hat der Verf, der in einem Provincialstadt lebt, nicht erlangen können.

X 1923.

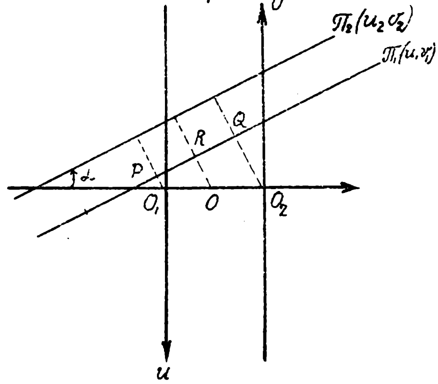
Чер 1



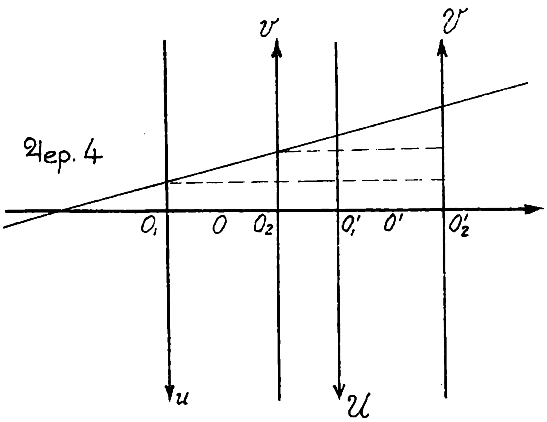
Чер 2



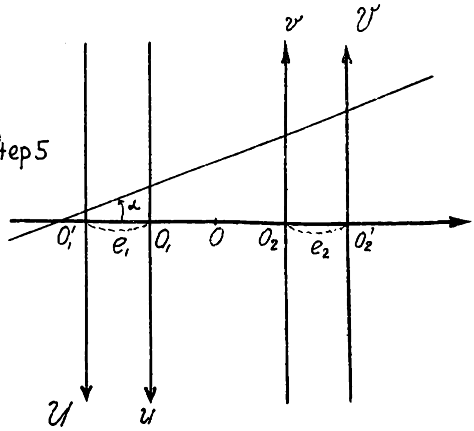
Чер3



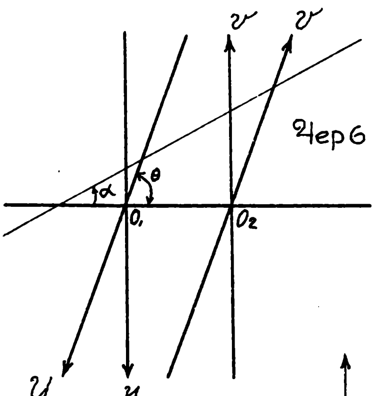
Чер. 4



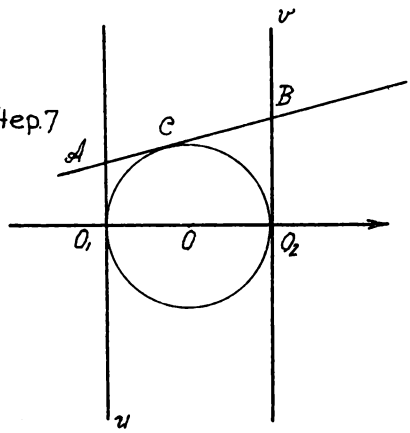
Чер5



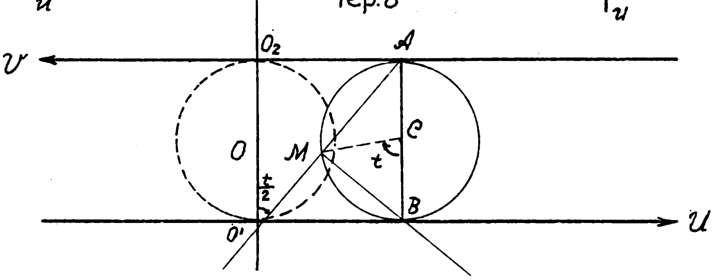
Чер6



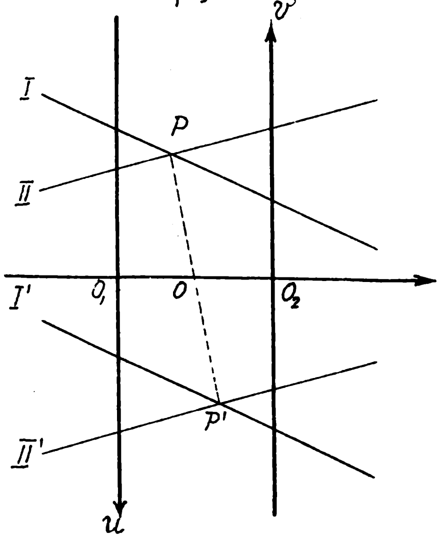
Чер.7



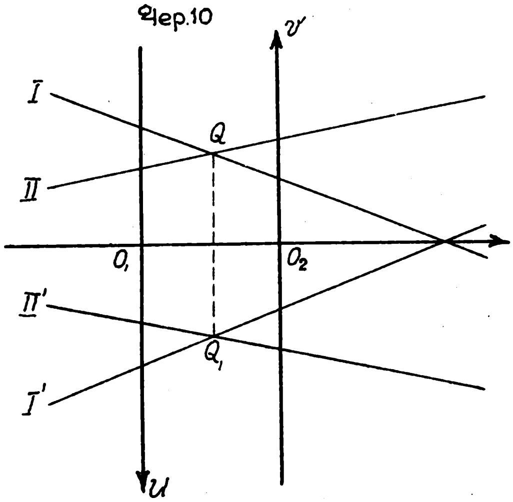
Чер.8



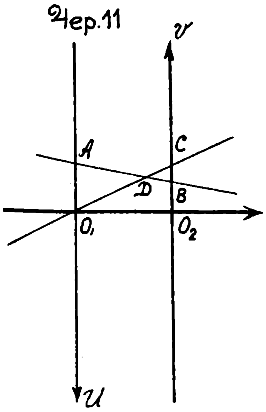
Чер.9



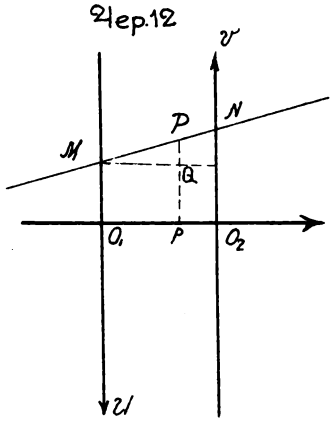
Чер.10



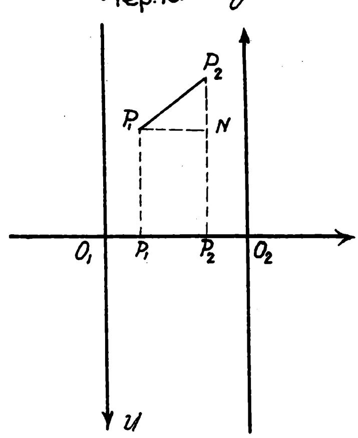
Чер.11



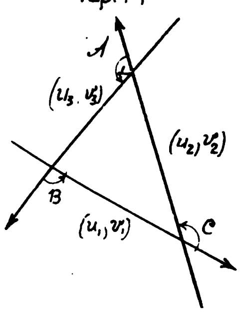
Чер.12



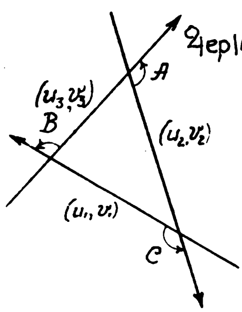
Чер.13.



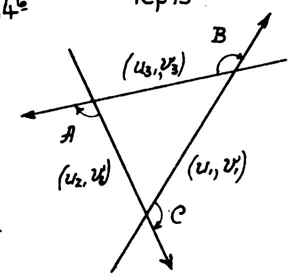
Чер.14а



Чер.14б



Чер.15



Чер.16